

О МОДЕЛИРОВАНИИ ОДНОСТОРОННИХ УСТОЙЧИВЫХ  
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Архипов С.В., Багрова И.А.

Кафедра математической статистики и системного анализа

---

*Поступила в редакцию 01.12.2009, после переработки 04.12.2009.*

---

В статье разработан датчик, генерирующий односторонние устойчивые случайные числа. В основу моделирования положена обобщенная ЦПТ. Анализируется его работа для различных значений характеристического показателя  $\alpha < 1$ .

Generator for one-sided stable random variables is developed in this article. Modelling is based on GCLT. Its work for various values of characteristic exponent  $\alpha < 1$  is analyzed.

**Ключевые слова:** моделирование случайной величины, устойчивые распределения.

**Keywords:** modelling random variable, stable distributions.

## 1. Введение

Устойчивые распределения представляют собой семейство распределений, имеющих достаточно широкий диапазон применений: в экономике, радиотехнике, физике, астрономии, гидрологии и других науках. В качестве определения этих законов взято свойство устойчивости:  $\forall a_1, a_2 > 0 \exists a_3 > 0$  и  $b \in R$ , т.ч.

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \stackrel{d}{=} a_3 X_3 + b,$$

где  $X_k, k = \overline{1, 3}$  независимые одинаково распределенные случайные величины.

Приведенное соотношение позволяет составить и решить уравнение для характеристической функции. Первые результаты появились в трудах Поля Леви в 20-30-х гг. прошлого столетия. В более позднем русскоязычном издании [2], гл.5 содержится их краткое изложение.

Для описания характеристических функций был выбран параметрический подход. Существует около десятка различных форм представлений и их модификаций.

К настоящему времени появилось несколько монографий специально посвященных устойчивым распределениям и процессам [3], [5], [7], [8]. Широкое распространение этих распределений повлекло за собой разработку различных методов оценивания параметров, а также построение математических моделей, использующих специфику поведения устойчивых распределений — тяжелые хвосты.

В свою очередь все это потребовало построения датчиков устойчивых случайных величин. В настоящее время существует несколько методик моделирования.

## 2. О методах моделирования устойчивых величин

Исторически первым появился датчик для односторонних устойчивых случайных величин, использующий интегральное представление функции плотности (см. [6]).

Пионерской работой в деле построения датчика устойчивых случайных чисел с произвольными параметрами была работа [4], в которой использовалось более общее, чем в [6], интегральное представление Золотарева (см. [3]).

Другая методика, основанная на представлении LePage'a устойчивых величин с помощью случайных рядов была предложена А. Janicki и А. Weron'ом в [5].

Разработанный нами датчик использует при моделировании важное свойство устойчивых распределений (см. [3], [7]): они являются предельными распределениями для нормированной и центрированной (при  $\alpha > 1$ ) суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, входящих в область притяжения устойчивых распределений ( $0 < \alpha < 1$ )

$$S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{b_n} \xrightarrow{d} X \quad (1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**Замечание.** Здесь можно отметить, что часто применяемый датчик для стандартного нормального закона имеет вид

$$S_{12} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{12} - (M\xi_1 + \dots + M\xi_{12})}{\sqrt{D\xi_1 + \dots + D\xi_{12}}} = \xi_1 + \dots + \xi_{12} - 6,$$

где  $\xi_k \sim R_{[0,1]}$  — равномерное распределение на отрезке  $[0,1]$ .

В качестве  $Y_k$  возьмем, как это было сделано в [8], случайные величины, распределенные по Парето, являющиеся наиболее простыми из области притяжения устойчивых законов. Опишем их.

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon^\alpha}{x^\alpha}, & x \geq \varepsilon, \\ 0, & x < \varepsilon, \end{cases}$$

функция плотности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \varepsilon^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq \varepsilon, \\ 0, & x < \varepsilon. \end{cases}$$

Вычислим характеристическую функцию распределения Парето. Для этого применим интегрирование по частям

$$f_Y(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{itx} \frac{\alpha \varepsilon^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = e^{it\varepsilon} \left( -\frac{\varepsilon^\alpha}{x^\alpha} \right) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \left( -\frac{\varepsilon^\alpha}{x^\alpha} \right) ite^{itx} dx = e^{it\varepsilon} - \varepsilon^\alpha \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^\alpha} d(-itx).$$

После подстановки  $u = -itx$ , преобразуем интеграл

$$f_Y(t) = e^{it\varepsilon} - (-it\varepsilon)^\alpha \int_{-it\varepsilon}^{-it\infty} e^{-u} u^{-\alpha} du.$$

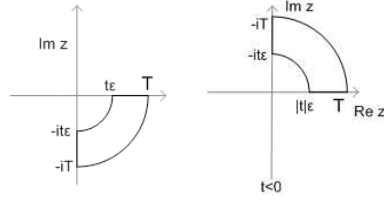


Рис. 1: Поворот контура интегрирования при  $t > 0$  и  $t < 0$

Осуществляя поворот контура интегрирования при  $t > 0$  и  $t < 0$ , как указано на рис. 1, получаем

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= e^{it\varepsilon} - (-it\varepsilon)^\alpha \int_{|t|\varepsilon}^{+\infty} e^{-u} u^{(1-\alpha)-1} du + \\ &+ i|t|\varepsilon(-i \cdot \text{sign}(t))^\alpha \int_0^{-\frac{\pi}{2} \text{sign}(t)} e^{-|t|\varepsilon e^{i\varphi}} e^{i\varphi(1-\alpha)} d\varphi = \\ &= e^{it\varepsilon} - (-it\varepsilon)^\alpha \Gamma(1-\alpha, |t|\varepsilon) + I(t, \varepsilon), \end{aligned}$$

где через  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  обозначена верхняя неполная гамма-функция, через  $I(t, \varepsilon)$  – интеграл по малой дуге, а  $(-it)^\alpha$  понимается в смысле главного значения

$$(-it)^\alpha = |t|^\alpha \exp \left\{ -\frac{\pi\alpha}{2} \cdot i \cdot \text{sign}(t) \right\}.$$

Теперь запишем выражение для характеристической функции суммы (1) и преобразуем его

$$f_{S_n}(t) = [f_Y(\frac{t}{b_n})]^n = [e^{\frac{it\varepsilon}{b_n}} - (\frac{-it\varepsilon}{b_n})^\alpha \Gamma(1-\alpha, \frac{|t|\varepsilon}{b_n}) + I(\frac{t}{b_n}, \varepsilon)]^n, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Разложив экспоненту и полагая  $b_n = bn^{1/\alpha}$ , где  $b$  – некоторая константа, получим

$$f_{S_n}(t) = [1 + \frac{it\varepsilon}{bn^{1/\alpha}} - (\frac{-it\varepsilon}{bn^{1/\alpha}})^\alpha \Gamma(1-\alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}}) + I(\frac{t}{bn^{1/\alpha}}, \varepsilon) + \delta_1(t, n)]^n.$$

Оценим интеграл по дуге:

$$\left| I(\frac{t}{bn^{1/\alpha}}, \varepsilon) \right| \leq \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}} \int_0^{-\frac{\pi}{2} \text{sign}(t)} e^{-|t|\varepsilon \cos(\varphi)} d\varphi \leq \frac{|t|\varepsilon\pi}{2bn^{1/\alpha}},$$

т.е. оценкой сверху является величина порядка  $n^{-1/\alpha}$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= [1 + \frac{it\varepsilon}{bn^{1/\alpha-1}} - (\frac{-it\varepsilon}{b})^\alpha \Gamma(1-\alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}}) + n(I(\frac{t}{bn^{1/\alpha}}, \varepsilon) + \delta_1(t, n))]^n = \\ &= \exp \left\{ \frac{it\varepsilon}{bn^{1/\alpha-1}} + nI(\frac{t}{bn^{1/\alpha}}, \varepsilon) - (\frac{-it\varepsilon}{b})^\alpha \Gamma(1-\alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}}) \right\} + \delta_2(n, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\delta_i(n, t)$ ,  $i = 1, 2$  —остаточные члены.

Применение предельного перехода при  $n \rightarrow \infty$  в последнем выражении обнуляет величину сдвига  $a = \varepsilon n^{1-\frac{1}{\alpha}}/b$  и интеграл по дуге, имеющий тот же порядок, что и  $a$ , а также переводит неполную гамма-функцию в полную и делает сколь угодно малым  $\delta_2(n, t)$ .

В итоге получим предельное выражение для характеристической функции суммы паретовских случайных величин

$$f_X(t) = \exp \left\{ -\left(-\frac{it\varepsilon}{b}\right)^\alpha \Gamma(1-\alpha) \right\}. \quad (3)$$

Полагая  $b = (\Gamma(1-\alpha))^{1/\alpha}$  и  $\varepsilon = 1$ , получим характеристическую функцию устойчивого распределения

$$f_X(t) = \exp \{ -(it)^\alpha \}. \quad (4)$$

Эта форма представления характеристической функции обсуждалась в [1]. Отметим, что в [8] задают

$$b = \varepsilon \left( \Gamma(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^{1/\alpha}$$

и получают из (3) характеристическую функцию в форме (A):

$$f_X(t) = \exp \left\{ -|t|^\alpha \left( 1 - i \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sign}(t) \right) \right\}. \quad (5)$$

Теоретическое положение о том, что  $\Gamma(1-\alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}}) \rightarrow \Gamma(1-\alpha)$  при  $n \rightarrow \infty$  требует отдельного рассмотрения, т.к. на практике число суммируемых случайных величин может быть достаточно большим, но не бесконечным.

Запишем равенство:

$$\Gamma(1-\alpha) = \Gamma(1-\alpha, z) + \gamma(1-\alpha, z).$$

Нижняя неполная гамма-функция  $\gamma(1-\alpha, z)$ , дополняющая  $\Gamma(1-\alpha, z)$  до  $\Gamma(1-\alpha)$ , имеет асимптотическое поведение

$$\gamma(1-\alpha, z) = \frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha} + O(z^{2-\alpha}), \quad z \rightarrow 0.$$

Поведение  $\gamma$  значительно отличается в зависимости от близости  $\alpha$  к единице. При  $\alpha$  удаленных от 1 имеем

$$\gamma(1-\alpha, \frac{C}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) = \frac{C^{1-\alpha}}{(1-\alpha)n^{\frac{1}{\alpha}-1}} + O(\frac{1}{n^{\frac{2}{\alpha}-1}}), \quad n \rightarrow \infty,$$

т.е. достаточно быстро стремится к нулю с увеличением  $n$ .

При  $\alpha \rightarrow 1$  изменение по  $n$  определяется множителем  $n^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ . При  $\alpha = 0.99$  он имеет вид  $\frac{1}{n^{100}} = \frac{1}{100\sqrt{n}}$ . Понятно, что любое разумное изменение его порядка  $n = 10^N$  существенно не изменит его значение близкое к 1. Поэтому порядок функции  $\gamma$  определяется множителем  $\frac{1}{1-\alpha}$ , который сравним со значением функции  $\Gamma(1-\alpha)$ .

Например, при  $\alpha = 0.99$ ,  $\Gamma(1 - \alpha) = 99.43$ ,  $z = 0.001$ ,  $\Gamma(1 - \alpha, z) = 6.11$ ,  $\gamma(1 - \alpha, z) = 93.32$ .

Откуда следует, что заключительный предельный переход от  $\Gamma(1 - \alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}})/b^\alpha$  к  $\Gamma(1 - \alpha)$  является наиболее чувствительным к значениям  $\alpha$  близким к 1.

Возникает задача подбора параметра  $b$  таким образом, чтобы соотношение  $\varepsilon^\alpha \Gamma(1 - \alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}})/b^\alpha$  было как можно ближе к 1. После фиксации  $\alpha, n, t$  мы придем к уравнению

$$b^\alpha = \left( \Gamma(1 - \alpha) - \frac{b^{\alpha-1} \left( \frac{|t|\varepsilon}{n^{1/\alpha}} \right)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right) \varepsilon^\alpha, \quad (6)$$

которое можно решить методом простой итерации по формуле

$$b_{k+1} = \left( \Gamma(1 - \alpha) - \frac{b_k^{\alpha-1} \left( \frac{|t|\varepsilon}{n^{1/\alpha}} \right)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \varepsilon. \quad (7)$$

На рисунке 2 можно увидеть зависимость полученных решений  $b$  от аргумента характеристической функции  $t$  при  $\alpha = 0.9, 0.95, 0.99$ :

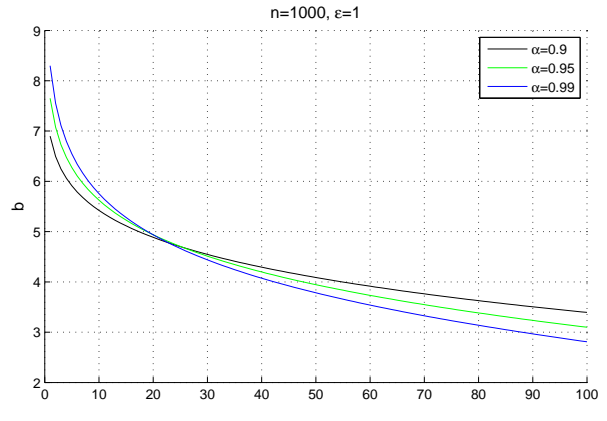


Рис. 2: Значения корней уравнения (6) при  $n = 1000, \varepsilon = 1$  и различных  $t$

Видно, что разброс значений  $b$  с увеличением  $\alpha$  возрастает. Поскольку нам нужно определить единственное значение  $b$ , то необходимо ввести меру качества аппроксимации  $f_{S_n}(t) \sim f_X(t)$  при достаточно больших  $n$ .

Выберем ее следующим образом. Зафиксируем отрезок изменения  $t \in [t_0, T]$ . На множестве точек  $t_j = t_0 + jh$  будем вычислять среднюю абсолютную ошибку

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |f_n(t_j) - f(t_j)|.$$

Для каждого  $t_j = t_0 + jh$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ ,  $h = 0.1$  при фиксированных  $\alpha$  и  $n$  будем находить  $b$  по итерационной формуле (7). Затем выберем такое из найденных значений  $b$ , которое обеспечивает  $\min MAE$ .

Описанная процедура дала следующие результаты в разных областях  $\alpha$ . Везде были взяты  $t \in [1, 100]$ ,  $n = 10^3$ .

Таблица 1: Оптимальные значения параметра  $b$  и соответствующие величины MAE и параметра сдвига

$\alpha$	$b$	MAE	сдвиг $a$
0.1	1.9421	0.0002	0.0000
0.5	3.1376	0.0003	0.0003
0.7	4.4378	0.0024	0.0117
0.8	5.2467	0.0085	0.0339
0.9	5.9113	0.0475	0.0785
0.95	6.1379	0.2020	0.1133
0.99	8.2988	1.2918	0.1124

Откуда видно, что средняя абсолютная ошибка существенно увеличивается при  $\alpha \rightarrow 1$ . Улучшить положение при  $\alpha$  близких к 1 можно только за счет увеличения  $n$  при фиксированном  $\alpha$ .

Например, при  $\alpha = 0.95$ ,  $t \in [1; 100]$  описанная выше процедура дает следующие результаты.

Таблица 2: Оптимальные значения параметра  $b$  и соответствующие величины MAE и параметра сдвига при  $\alpha = 0.95$  и различных  $n$

$n$	$b$	MAE	сдвиг $a$
$10^3$	6.1379	0.2020	0.1133
$10^4$	8.0322	0.0510	0.0767
$10^5$	9.7065	0.0376	0.0562
$10^6$	11.2499	0.0297	0.0430
$10^{10}$	15.7001	0.0138	0.0190

### 3. Результаты моделирования

Датчик устойчивых случайных чисел был реализован в среде Matlab. Паретовские случайные числа были получены с помощью обратной функции распределения, аргументом которой был базовый датчик  $unif\_rnd \in (0, 1)$ . Основными параметрами датчика устойчивых величин были характеристический показатель  $\alpha$ , количество суммируемых чисел по Парето  $n$  и количество получаемых устойчивых случайных чисел  $k$ .

Продemonстрируем работу датчика. При малых  $\alpha \rightarrow 0$  график эмпирической плотности стремится к графику  $\delta(0)$  (см. Рис. 3).

При  $\alpha = 0.5$  функция плотности устойчивого распределения имеет явное выражение. В литературе, например, она имеет различный вид – в книгах [2],[5],[7]:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2x}} x^{-\frac{3}{2}},$$

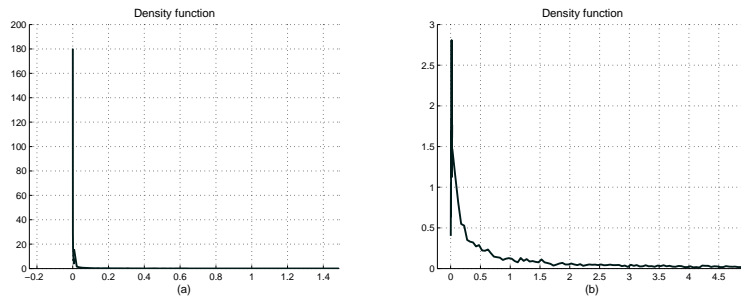


Рис. 3: График функции плотности сгенерированных чисел при  $n = 10^3, k = 10^4$ , а)  $\alpha = 0.1$ , б)  $\alpha = 0.3$

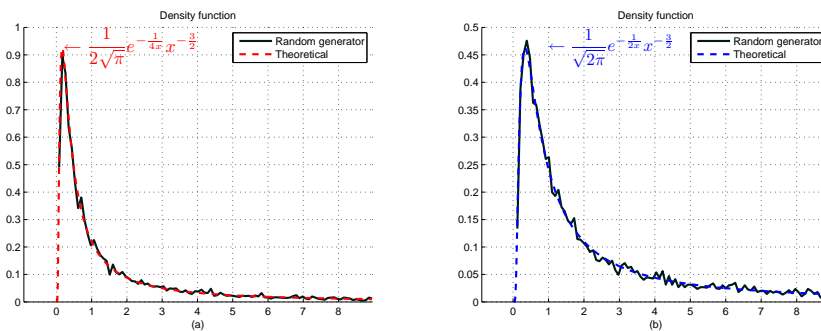


Рис. 4: График функций плотности сгенерированных чисел и устойчивой случайной величины при  $n = 10^3$ ,  $k = 10^4$ ,  $\alpha = 0.5$ , а)  $\varepsilon = 1$ , б)  $\varepsilon = 2$

а в [3], [8]:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4x}} x^{-\frac{3}{2}}.$$

Из представления (3) вытекает, что за изменение масштаба отвечает параметр  $\varepsilon$  следующим образом. Чем дальше вправо сдвигается граница паретовских случайных величин  $\varepsilon$ , тем дальше вправо сдвигаются соответствующие графики устойчивых плотностей (см. Рис.4).

Случай  $\alpha$  близких к 1 требует отдельного рассмотрения. Для сравнения строилась теоретическая функция плотности устойчивого распределения, соответствующая форме (А). Значения этой функции были взяты из программы Stable.exe, разработанной J.Nolan'ом (см. <http://academic2.american.edu/jpnolan/stable/stable.html>).

Из рис. 5 видно, что функция эмпирической плотности приближается к дельта-функции  $\delta(1)$ , сосредоточенной в единице, а график теоретической функции плотности в форме (А) сдвигается вправо. Это расхождение объясняется тем, что предельная плотность датчика имеет вид (4), отличный от (5).

Чтобы получить с помощью датчика устойчивые случайные числа в форме (А) необходимо преобразовать третье слагаемое в экспоненте из (2) следующим

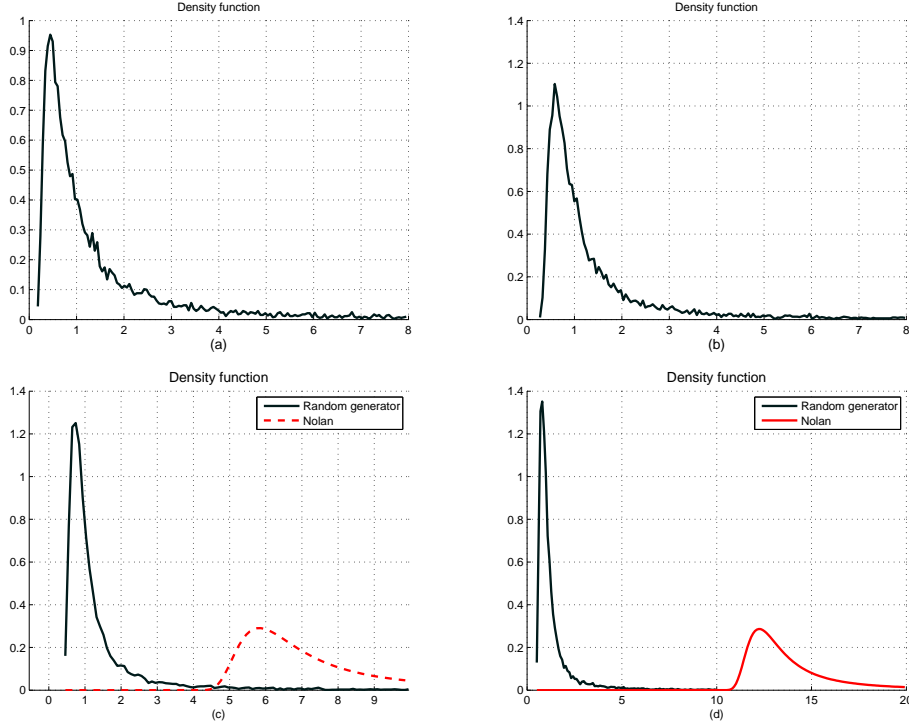


Рис. 5: График функций плотности сгенерированных чисел и устойчивой случайной величины в форме (А) с) и d) при  $k = 10^4$ ,  $n = 10^3$ ,  $\varepsilon = 1$ , а)  $\alpha = 0.7$ , б)  $\alpha = 0.8$  с)  $\alpha = 0.9$ , d)  $\alpha = 0.95$

образом:

$$\begin{aligned}
 & \exp \left\{ - \left( -\frac{it\varepsilon}{b} \right)^\alpha \Gamma \left( 1 - \alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}} \right) \right\} = \\
 & = \exp \left\{ - \left( \frac{|t|\varepsilon}{b} \right)^\alpha \Gamma \left( 1 - \alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}} \right) e^{-\frac{\pi\alpha}{2} i \text{sign}(t)} \right\} = \\
 & = \exp \left\{ - \left( \frac{|t|\varepsilon}{b} \right)^\alpha \Gamma \left( 1 - \alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}} \right) \left( \cos \frac{\pi\alpha}{2} - i \cdot \sin \frac{\pi\alpha}{2} \text{sign}(t) \right) \right\} = \\
 & = \exp \left\{ - \left( \frac{|t|\varepsilon}{b} \right)^\alpha \Gamma \left( 1 - \alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}} \right) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \left( 1 - itg \frac{\pi\alpha}{2} \text{sign}(t) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Для сходимости характеристической функции суммы (1) к характеристической функции устойчивого распределения в форме (А) из (5) необходимо получить соотношение:

$$\frac{\varepsilon^\alpha}{b^\alpha} \Gamma \left( 1 - \alpha, \frac{|t|\varepsilon}{bn^{1/\alpha}} \right) \cos \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right)$$

как можно ближе к единице. Повторяя процедуру для нахождения  $b$ , получаем следующие результаты ( $n = 10^3$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $t \in [1; 100]$ ), которые занесены в таблицу.



Таблица 3: Оптимальные значения параметра  $b$  и соответствующие величины МАЕ и параметра сдвига

$\alpha$	$b$	МАЕ	сдвиг $a$
0.1	1.7158	0.0003	0.0000
0.5	1.5699	0.0001	0.0006
0.7	1.4388	0.0008	0.0360
0.8	1.2113	0.0020	0.1468
0.9	0.8142	0.0101	0.5701

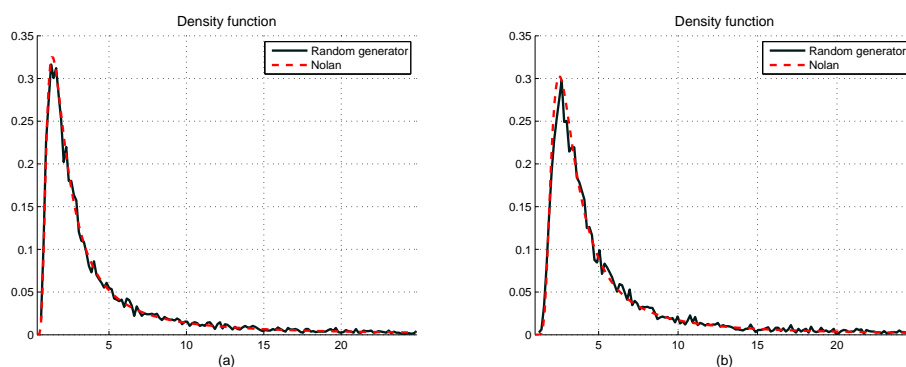


Рис. 6: График функций плотностей сгенерированных чисел и устойчивой случайной величины в форме (А) при  $k = 10^4$ ,  $n = 10^4$ ,  $\varepsilon = 1$ , а)  $\alpha = 0.7$ , б)  $\alpha = 0.8$

Продemonстрируем работу датчика в этом случае.

Визуальный анализ графиков эмпирической и теоретической функций плотности позволяет сделать вывод об их хорошем совпадении.

Для моделирования устойчивых случайных чисел в форме (М) необходимо учитывать, что их характеристическая функция имеет следующее представление (см. [3]):

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \exp \left\{ -|t|^\alpha + it(|t|^{\alpha-1} - 1)\beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right\} = \\
 &= \exp \left\{ -|t|^\alpha \left( 1 - i\beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \operatorname{sign}(t) \right) - i\beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \cdot t \right\},
 \end{aligned}$$

которая при  $\beta = 1$  отличается от формы (А) множителем  $\exp \left\{ -it \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right\}$ . Добавив этот сдвиг в формулу датчика, получаем устойчивые случайные числа в форме (М) (см. Рис. 7). Для сравнения на графике помещена теоретическая функция плотности, взятая из программы Nolan'a Stable.exe.

## Заключение

Процесс моделирования показал, что принцип работы датчика, основанный на обобщенной центральной предельной теореме, дает возможность получать устойчивые случайные числа в различных формах представления. Отметим, что подбор

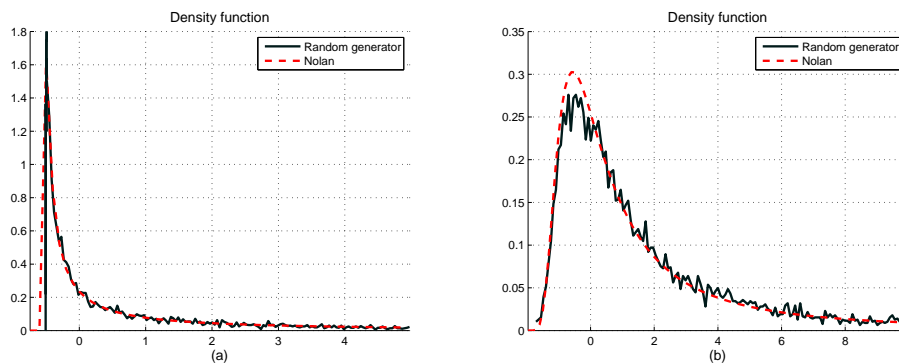


Рис. 7: График функций плотности сгенерированных чисел и устойчивой случайной величины в форме  $(M)$  при  $k = 10^4$ ,  $n = 10^4$ ,  $\varepsilon = 1$ , а)  $\alpha = 0.3$ , б)  $\alpha = 0.8$

множителя  $b$  в нормирующем коэффициенте  $b_n = bn^{1/\alpha}$  требует отдельной процедуры для достижения удовлетворительной точности.

### Список литературы

- [1] Архипов С.В. Замечания к представлению характеристических функций устойчивых распределений. //Сб. «Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация». – Тверь: изд-во Тверского государственного университета, 2002. – с. 97-101.
- [2] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972. – 375 с.
- [3] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983. – 304 с.
- [4] Chambers, J., C. Mallows, and B. Stuck . A method for simulating stable random variables. //Journal of the American Statistical Association.Theory and Methods Section. – 1976. Vol. 71, № 354. – p. 340-344.
- [5] Janicki, A. and A. Weron. Simulation and Chaotic Behavior of  $\alpha$ -Stable Stochastic Processes. –New York: Marcel Dekker, 1994. – 355 p.
- [6] Kanter, M. Stable densities under change of scale and total variation inequalities. – Ann. Probab. – 1975. Vol. 31. – p. 967-707.
- [7] Samorodnitsky, G. and M. Taqqu. Stable Non-Gaussian Random Processes. –New York: Chapman and Hall, 1994. – 632 p.
- [8] Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications. – Utrecht: VSP, 1999. – 594 p.